Πρόταση: Κριτήριο Σύγκρισης

Έστω $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ δύο ακολουθίες και $M>0$ ώστε $0\le a_k\le Mb_k$ $\forall k\in\mathbb{N}$.

α) Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ είναι συγκλίνουσα, τότε και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ είναι συγκλίνουσα.

β) Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει, τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ αποκλίνει.

Απόδειξη:

Θέτουμε $s_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$, $t_n=\sum_{k=1}^{n} b_k$

α) Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ είναι συγκλίνουσα, τότε η $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, δηλαδή $\exists\theta>0 : t_n\le\theta$ $\forall n$. $\forall n\in\mathbb{N}$ $s_n=\sum_{k=1}^{n} a_k\le\sum_{k=1}^{n} Mb_k=M\sum_{k=1}^{n} b_k=Mt_n\le M\theta$.

Επειδή $a_k\ge 0$ $\forall k$ και s_n άνω φραγμένη, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

β) Είναι άμεση συνέπεια του α).

Πρόταση: Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης

Αν $a_k>0$, $b_k>0$ $\forall k$ ώστε $\lim\frac{a_k}{b_k}=\ell>0$, τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει.

Απόδειξη:

Επειδή $\left(\frac{a_k}{b_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα, είναι φραγμένη, δηλαδή $\exists M>0$ ώστε

$\frac{a_k}{b_k}\le M$ $\forall k \overset{a_k>0}{\Longrightarrow} 0\le a_k\le Mb_k$ $\forall k\in\mathbb{N}$.

Έτσι, αν η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, θα συγκλίνει και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, από την προηγούμενη πρόταση.

Αντίστροφα, αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε επειδή $\lim\frac{b_k}{a_k}=\frac{1}{\ell}>0$, προκύπτει (όπως προηγουμένως) ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει.

Παραδείγματα:

(α) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ Συγκλίνει?

Είχαμε δει ότι η $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$ συγκλίνει.

Επειδή $\frac{1}{k^2}\le 2\cdot\frac{1}{k(k+1)}$

$$\left(\begin{array}{l}\Leftrightarrow k(k+1)\le 2k^2\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow k+1\le 2k\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow 1\le k \text{ που ισχύει } \forall k\end{array}\right)$$

Από το κριτήριο σύγκρισης, η $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ συγκλίνει.

(β) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$, $p>2$ Συγκλίνει?

<u>Απόδειξη:</u>

$0 \le \frac{1}{k^p} \le \frac{1}{k^2}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ (εφόσον $p>2$)

Άρα, από το κριτήριο σύγκρισης, εφόσον η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, συγκλίνει και η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$.

(γ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$, $0<p\le 1$ Συγκλίνει?

Εφόσον, $0<p\le 1 \Rightarrow 0< \frac{1}{k} \le \frac{1}{k^p}$

Έτσι, εφόσον η αρμονική σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει, αποκλίνει και η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$.

δ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$, $p\le 0$ Συγκλίνει?

Εφόσον $p\le 0$ η $\frac{1}{k^p} \not\to 0$, άρα η σειρά αποκλίνει.

(ε) Για ποια $p\in\mathbb{R}$ συγκλίνει η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$;

<u>Απόδειξη:</u>

Για $p\le 0$ η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ αποκλίνει (όπως είδαμε).

Έστω $p>0$. Τότε, η ακολουθία $\left(\frac{1}{k^p}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα και $\frac{1}{k^p} \to 0$.

Έτσι, από το κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy, η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$ η $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{(2^k)^p}$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$ η $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{(1-p)k}$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$ η $\sum_{k=1}^{\infty} (2^{(1-p)})^k$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{1-p} < 1 \Leftrightarrow 1-p<0 \Leftrightarrow p>1$.

(στ) Να εξεταστεί για ποια $p>0$ συγκλίνει η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(\log_2 k)^p}$.

<u>Απόδειξη:</u>

Θέτουμε $a_k = \frac{1}{k(\log_2 k)^p}$, $\lim a_k = 0$ και η a_k φθίνουσα. Από το κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy, η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(\log_2 k)^p}$ συγκλίνουσα $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k(\log_2 2^k)^p}$ συγκλίνουσα $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k\log_2 2)^p}$ συγκλίνουσα $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\log_2 2)^p} \cdot \frac{1}{k^p}$ συγκλίνουσα $\Leftrightarrow p>1$.

(ζ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3+5k^2}{k^5+2k^4+3k^2+1}$. Θέτουμε $a_k = \frac{k^3+5k^2}{k^5+2k^4+3k^2+1}$ και $b_k = \frac{1}{k^2}$.

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{k^5+5k^4}{k^5+2k^4+3k^2+1} = \frac{1+5\cdot\frac{1}{k}}{1+2\frac{1}{k}+3\left(\frac{1}{k}\right)^3+\left(\frac{1}{k}\right)^5} \to 1>0$$

Εφόσον $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, συγκλίνει και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

(η) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+3}{2k^2+1}$. Θέτουμε $a_k = \frac{k+3}{2k^2+1}$ και $b_k = \frac{1}{k}$

Παρατηρούμε ότι $\frac{a_k}{b_k} \to \frac{1}{2}$ και εφόσον η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει, αποκλίνει και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Ορισμός: Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ λέγεται απολύτως συγκλίνουσα, όταν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ είναι συγκλίνουσα. Όταν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ είναι συγκλίνουσα, ενώ η $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ αποκλίνει, λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει υπό συνθήκη.

Πρόταση: Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ είναι απολύτως συγκλίνουσα, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ είναι συγκλίνουσα.

Απόδειξη:

Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του Cauchy.

Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον η $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνουσα, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n > m \geq n_0$ να ισχύει: $\sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$. $\forall n > m \geq n_0$: $\left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon$. Από το κριτήριο του Cauchy, η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

Παραδείγματα:

(α) Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k+5)}{k^2}$.

Απόδειξη:

Εφόσον $\left| \frac{\sin(2k+5)}{k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2}$ και η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, συγκλίνει και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(2k+5)}{k^2} \right|$, δηλαδή η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k+5)}{k^2}$ συγκλίνει απόλυτα άρα συγκλίνουσα.

(β) Υπάρχουν σειρές που είναι συγκλίνουσες, αλλά όχι απολύτως συγκλίνουσες.

• $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, η σειρά αυτή δεν είναι απολύτως συγκλίνουσα, αφού $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$.

Θα δείξουμε ότι η σειρά συγκλίνει. Θέτουμε $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, $n \in \mathbb{N}$

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{(2n-1)2n}$$

Παρατηρώ ότι η S_{2n} είναι αύξουσα, εφόσον $S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$

και $S_{2n} \leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ← συγκλίνουσα

Έτσι, η S_{2n} αύξουσα και άνω φραγμένη, άρα συγκλίνουσα.

Θέτω $s = \lim s_{2n}$

$$S_{2n-1} = S_{2n} + \frac{1}{2n} \to s + 0 = s$$

Εφόσον $\left.\begin{array}{l} S_{2n-1} \to s \\ S_{2n} \to s \end{array}\right\} \Rightarrow$ συμπεραίνω ότι η S_n συγκλίνει.

Θεώρημα: Κριτήριο Λόγου ή Κριτήριο D'Alembert

Έστω $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ μια σειρά με μη μηδενικούς όρους, ώστε να υπάρχει το όριο $\lim \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \ell$ $(0 \le \ell \le +\infty)$

α) Αν $\ell < 1$, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απόλυτα.

β) Αν $\ell > 1$, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.

Απόδειξη:

α) $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \to \ell < 1$. Επιλέγω x με $\ell < x < 1$.

Εφαρμόζοντας τον ορισμό του ορίου για $\varepsilon = x - \ell > 0$, συμπεραίνουμε ότι $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall k \ge n_0$ $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < x \Rightarrow |a_{k+1}| < x|a_k|$ $\forall k \ge n_0$.

$|a_{n_0+1}| \le x|a_{n_0}|$

$|a_{n_0+2}| \le x|a_{n_0+1}| \le x^2|a_{n_0}|$

$\vdots$

$|a_{n_0+m}| \le x^m|a_{n_0}|$

Επαγωγικά δείχνεται ότι $|a_k| \le x^{k-n_0}|a_{n_0}|$ $\forall k \ge n_0$

δηλαδή $|a_k| \le x^k \left(\frac{|a_{n_0}|}{x^{n_0}}\right)$ $\forall k \ge n_0$.

Θέτω $M = \frac{|a_{n_0}|}{x^{n_0}}$: $\boxed{|a_k| \le M x^k \ \forall k \ge n_0 \ (1)}$

Εφόσον $0 < x < 1$, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ συγκλίνει, άρα και η $\sum_{k=n_0}^{\infty} x^k$ συγκλίνει.

Λόγω της (1) και του κριτηρίου σύγκρισης, η $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ συγκλίνει, άρα η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

β) Αν $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \to \ell > 1$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$ $\forall k \ge n_0$.

Άρα, $|a_{k+1}| \ge |a_k|$ $\forall k \ge n_0$